Übungsblatt 1

⚠ *Abzugeben bis: 10.11.2016 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

1.1: Rechnen mit Vektoren

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standartbasis die Punkte $A = [1, -1, 2]$, $B = [3, 0, 1]$, $C = [2, 2, -3]$ und $D = [4, 3, -4]$.

1) Zeigen Sie, dass die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ linear unabhängig sind. *(3 Punkte)*

2) Bilden somit diese Ortsvektoren eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$? *(1 Punkte)*

3) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ komplanar sind. *(3 Punkte)*

4) Begründen sie, wieso die Punkte $ABCD$ ein Parallelogramm bilden. *(2 Punkte)*

5) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC. *(3 Punkte)*

6) Berechnen Sie den Winkel der zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ eingeschloßen wird. *(2 Punkte)*

7) Bestimmen Sie das Volumina des Spates der von $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$ erzeugt wird. *(3 Punkte)*

8) Bestimmen Sie das Volumina des Spates der von $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ erzeugt wird. *(3 Punkte)*

9) Welchen Zusammenhang zwischen Spatprodukt und linearer Unabhängigkeit gibt es? *(2 Punkte)*

1.2: Beweisen mit Vektoren

1) Gegeben Sei ein (nicht entartetes) Dreieck ABC im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$. Bezeichnen wir die Strecken $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ und sei M und N die Mittelpunkte der Seiten b und a. Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{MN}$ parallel zur Strecke c und halb so lang wie diese ist. *(5 Punkte)*

2) Sei $\{\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3\}$ die standard Einheitsbasis im $\mathbb{R}^3$, und sei der beliebig Vektor $\vec{v}$. Beweisen Sie, dass $\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1$ gilt, wobei $\alpha_i = \text{Winkel}(\widehat{e}_i, \vec{v})$. *(5 Punkte)*

3) Sei $\vec{v}, \vec{w}$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$. Beweisen Sie, dass (i) $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ und (ii) $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$ (Cauchy-Schwartz Ungleichheit). Was ist die geometrische Bedeutung? *(3 Punkte)*

1.3: Kreise, Kugeln und Hyperkugeln

Der Betrag eines Vektors kann genutzt werden um Kreise (im $\mathbb{R}^2$), Kugeln (im $\mathbb{R}^3$) oder Hyperkugeln (im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$) zu beschreiben. Die Gleichungsform lautet immer

$$\left|\vec{x} - \overrightarrow{OM}\right|^2 = r^2$$

wobei $\overrightarrow{OM}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes ist, und r der Radius ist.

1) Begründen Sie wieso man *exakt* von einer Kreislinie bzw. Kugelschale sprechen müsste. *(1 Punkte)*

2) Wie kann die Gleichung modifiziert werden, um einen Vollkreis bzw. Vollkugel zu erhalten? *(1 Punkte)*

3) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises $K : x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$. *(3 Punkte)*

4) Gegeben Sei die Kugelschale $K : |\vec{x} - (1, 1, 7)|^2 = 25$, sowie die drei Punkte $A = [4, 1, 3]$, $B = [3, 0, 10]$, und $C = [-1, 1, 1]$ im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie welcher Punkt auf, in- oder außerhalb von K liegt. *(3 Punkte)*

5) Für die bisherige Kugel finden Sie (i) den Vektor $\overrightarrow{MA}$, und (ii) zwei weitere unabhängige Vektoren, die senkrecht zu $\overrightarrow{MA}$ sind. Man könnte jetzt eine Ebene mit solchen zwei Vektoren (senkrecht zu $\overrightarrow{MA}$) definieren, mit Ursprung im Punkt A. Welche Eigenschaft hat diese Ebene bezüglich die Kugel? *(5 Punkte)*