Übungsblatt 10

⚠ *Abzugeben bis: 26.1.2017 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

9.1: Multipol Entwicklung der Poisson Gleichung

Für eine Ladungsdichte, die außerhalb eines Abstandes R verschwindet, betrachten wir das „Fernfeld" für $r \gg R$. Dann, als Lösung der Poisson Gleichung $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$ hat man die *Multipol Entwicklung*

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{1}{r^3}\vec{r}^T\vec{p} + \frac{1}{2r^5}\vec{r}^T\bar{Q}\vec{r}\right),$$

wobei

$$\begin{aligned} q &= \int \rho(\vec{r}\,')dV' && \text{Gesamtladung} \\ \vec{p} &= \int \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'dV' && \text{Dipolmoment} \\ \bar{Q}_{jk} &= \int \left(3r'_j r'_k - r'^2\delta_{jk}\right)\rho(\vec{r}\,')dV' && \text{Quadrupolmoment.} \end{aligned}$$

Finden Sie die Multipol Entwicklung für diese Ladungsdichte:

1) $\rho(\vec{r}) = Q\sum_{i=1}^{8}\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$, mit $\vec{r}_i = (\pm1, \pm1 \pm 1)$ (die 8 Ecken eines Würfels). *(12 Punkte)*

2) $\rho(\vec{r}) = \frac{3Q}{4\pi r_0^3}$ für $r \le r_0$ (homogene Ladungsverteilung im Inneren einer Kugel mit Radius r_0). *(12 Punkte)*

3) $\rho(\vec{r}) = -p\delta(x)\delta(y)\delta'(z)$ (Dipolverteilung). *(18 Punkte)*

9.2: Helmholtz Gleichung

Sei K eine Kugel mit Radius R und Grenze ∂K. Sei auch eine Funktion $\phi(\vec{r})$, so dass

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(\vec{r}) &= \lambda\phi(\vec{r}) && r < R \\ \phi(\vec{r}) &= 0 && r \ge R. \end{aligned}$$

Benutzen Sie den Satz von Gauß mit $\vec{f} = \phi\vec{\nabla}\phi$ und die Kugel K um zu zeigen, dass $\lambda < 0$ gilt. *(20 Punkte)*