Übungsblatt 11

⚠ *Abzugeben bis: 2.2.2017 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

11.1: 1d Wellengleichung

Die funktion $\phi(x,t)$ erfülle die eindimensionale Wellengleichung $\partial^2\phi/\partial x^2 = c^{-2}\partial^2\phi/\partial t^2$ unter den Randbedingungen $\phi(x=0,t) = \phi(x=L,t) = 0$ (feste Enden).

1) Berechnen Sie die Eigenmoden und Eigenfrequenzen. *(10 Punkte)*

2) Berechnen Sie die Lösung $\phi(x,t)$ für die Anfangsbedingungen $\phi(x,t=0) = 0$ und $\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t=0) = g(x)$. *(10 Punkte)*

(**Hinweis:** benutzen Sie $\int_0^\pi \sin(ny)\sin(my)dy = \pi\delta_{nm}/2$.)

11.2: 2d Wellengleichung

Die Schwingungen einer ebenen Membran mit eingespanntem Rand genügen der zweidimensionalen Wellengleichung $\nabla^2\phi(\vec{r},t) = c^{-2}\partial^2\phi/\partial t^2$ mit $\phi(\vec{r},t) = 0$ auf dem Rand. Zeigen Sie, dass die Eigenmoden der Schwingung einer kreisförmigen Membran (Radius r_0) in ebenen Polarkoordinaten r,φ durch

$$\phi(\vec{r},t) = J_m(pr)\sin(m\varphi)\sin(cpt+\alpha)$$

gegeben sind, mit $m = 0,1,2....$ Dabei ist die Funktion $J_m(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$J_m'' + \frac{1}{z}J_m' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)J_m = 0,$$

eine sogenannte *Bessel-Funktion*. Der Wert von p wird festgelegt durch die Randbedingung $J_m(pr_0) = 0$. *(20 Punkte)*

11.3: 3d Wellengleichung

Eine *Kugelwelle* ist eine Lösung der 3d Wellengleichung $\nabla^2\phi(\vec{r},t) = c^{-2}\partial^2\phi/\partial t^2$, mit $\phi(x,y,z,t) = U(\sqrt{x^2+y^2+z^2},t)$ (d.h., die Lösung hängt nur von t und dem Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ab). Benutzen Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, um die partielle Differentialgleichung für $U(r,t)$ zu finden (mit Ableitungen *nur* nach r und t). Zeigen Sie dann, dass die allgemeine Lösung dieser partielle Differentialgleichung $U(r,t) = (f(r+ct)+g(r-ct))/r$ ist. *(20 Punkte)*

(**Hinweis:** finden Sie die Gleichung für $V(r,t) \equiv rU(r,t)$, und erinnern Sie die allgemeine Lösung der 1d Wellengleichung.)