Übungsblatt 2

⚠ *Abzugeben bis: 17.11.2016 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

2.1: Determinanten, Flächen, und Volumen

1) Gegeben seien im $\mathbb{R}^2$ die Vektoren $\vec{a} = (2,2)$ und $\vec{b} = (-3,-1)$. Berechnen Sie die Fläche des durch diese Vektoren aufgespannte Parallelogramms mittels der Determinanten der Matrizen

$$A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad B \equiv \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

2) Begründen Sie den Vorzeichenwechsel und zeichnen Sie das Parallelogramm. *(3 Punkte)*

3) Wir können das Spatprodukt folglich auch als Determinate darstellen. Seien hierzu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren. Die Matrix erhält hierdurch folgende Gestalt

$$C \equiv \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \det\left(C\right) = \det\left(C^T\right)$ gilt mittels direkter Rechnung. *(9 Punkte)*

4) Berechnen Sie das $\mathbb{R}^4$-Hypervolumen des durch die Vektoren $\vec{a} = (2,1,3,2), \vec{b} = (1,3,2,-2), \vec{c} = (0,3,4,2)$ und $\vec{d} = (-2,-1,-3,3)$ aufgespannten Tesserakts. *(4 Punkte)*

2.2: Kronecker-Delta und Levi-Civita-Symbol

Wir definieren das Kronecker-Delta $\delta_{ij} \equiv \widehat{e}_i \cdot \widehat{e}_j$ und das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{ijk} \equiv \widehat{e}_i \cdot (\widehat{e}_j \times \widehat{e}_k)$ mittels der Standarbasis des $\mathbb{R}^3$.

1) Welche Werte kann das Kronecker-Delta und das Levi-Civita-Symbol annehmen? *(4 Punkte)*

2) Interpretierem Sie das Kronecker-Delta und das Levi-Civita-Symbol geometrisch *(4 Punkte)*

3) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ (Hilfe: schreiben Sie erst die Levi-Civita-Symbole als Determinanten mit $\widehat{e}_i, \widehat{e}_j, \widehat{e}_k, \widehat{e}_m$ und $\widehat{e}_n$, und benutzen Sie auch $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ und $\det(A) = \det(A^T)$). *(5 Punkte)*

2.3: Eigenwerte, Eigenvektoren, und Matrix-Exponentialfunktion

Gegeben seien nun die Matrizen

$$M_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_5 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren. *(10 Punkte)*

2) Sei $A \in \mathbb{R}^2$ eine Matrix von der bekannt ist, dass $A \cdot A = A^2 = E$ (E ist Einheitsmatrix). Zeigen Sie, dass die Eigenwerte nur ± 1 sein können. *(5 Punkte)*

3) Rechnen Sie die Matrix-Exponentialen e^{M_3}, e^{M_4} und e^{M_5}. *(6 Punkte)*

4) Sei $\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $e^{\frac{i\beta}{2} M_5} = E \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + i M_5 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ gilt, mit i als imaginäre Einheit. *(5 Punkte)*