# Übungsblatt 4

⚠ *Abzugeben bis: 1.12.2016 um 18:00 Uhr*

*Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes:* ________

## 4.1: Gradient und Laplace

Berechnen Sie den Gradient ($\vec{\nabla} f$) und den Laplace ($\nabla^2 f$) der folgenden Skalarfelder:

1) $f(x,y,z) = x^2 y + yz^3 - z^2$ *(6 Punkte)*

2) $f(x,y,z) = \sin^2 xy + \cos yz$ *(6 Punkte)*

3) $f(x,y,z) = ye^{-x^2} + xe^{-y^2} + \ln(xyz)$ *(6 Punkte)*

## 4.2: Divergenz und Rotation

Berechnen Sie die Divergenz ($\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$) und die Rotation ($\vec{\nabla} \times \vec{f}$) der folgenden Vektorfelder:

1) $\vec{f}(x,y,z) = (ax + by)\hat{e}_x + (cx + dy)\hat{e}_y + (z^n)\hat{e}_z$ *(6 Punkte)*

2) $\vec{f}(x,y,z) = (\cos^2(x) + y^2 + z)\hat{e}_x + \left(\ln \frac{y}{1+y}\right)\hat{e}_y + (ze^{-z^2})\hat{e}_z$ *(6 Punkte)*

3) $\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{y+z}\hat{e}_x + \frac{1}{x^2+z^2}\hat{e}_y + \frac{\ln z}{x^2-y^3}\hat{e}_z$ *(6 Punkte)*

## 4.3: Laplace in Polarkoordinaten und 2d Laplace-Gleichung

1) Beweisen Sie, dass in $\mathbb{R}^2$ der Laplace

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

in Polarkoordinaten $\{x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\}$ gleich

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

ist. *(12 Punkte)*

2) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(r,\theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\gamma_m r^m + \delta_m r^{-m}\right)\left(\alpha_m \cos(m\theta) + \beta_m \sin(m\theta)\right)\right)$$

eine Lösung der sogenannte *Laplace-Gleichung* $\nabla^2 f = 0$ in Polarkoordinaten ist. *(6 Punkte)*