Übungsblatt 5

⚠ *Abzugeben bis: 8.12.2016 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

5.1: Längen von Kurven

1) Die *Zykloide* ist gegeben durch $\vec{r}(t) = a\,(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $t \in [0, 2\pi)$.

   i) Skizzieren Sie die Zykloide für das gegebene t und festen a. *(2 Punkte)*

   ii) Zeigen Sie, dass die Länge der Zykloide $8a$ beträgt. *(8 Punkte)*

2) Die *Astroide* ist gegeben durch $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ mit $t \in [0, 2\pi)$.

   i) Skizzieren Sie die Astroide für das gegebene t. *(4 Punkte)*

   ii) Zeigen Sie, dass die Länge der Astroide 6 ist. *(6 Punkte)*

3) Die *Spiralkurve* ist gegeben durch $\vec{r}(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t), \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3})$ mit $t \in [0, 4\pi)$.

   i) Skizzieren Sie eine Projektion in die xy-Ebene der Spiralkurve. *(4 Punkte)*

   ii) Berechnen Sie die Länge der Spiralkurve. *(6 Punkte)*

5.2: Die Länge eines Funktionsgraphen

Für eine in $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f(x)$ sei die Ableitung $f'(x)$. Zeigen Sie, dass die Länge des Graphen von $f(x)$ die Bogenlänge $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ besitzt. *(5 Punkte)*

5.3: Arbeit und konservative Kräfte

Die *Arbeit* wird in der Mechanik als das Skalarprodukt aus Kraft und Weg definiert. Wenn auf einen Körper auf der geraden Strecke vom Punkt A zum Punkt B eine Kraft $\vec{F}$ wirkt, dann wird am Körper die Arbeit

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

verrichtet, wo das Integral ein vektorielles Kurvenintegral ist.

1) Berechnen Sie die Arbeit entlang folgender Wege für die 2d-Kräfte $\vec{F}_1(\vec{x}) = m(x^2y, xy^2)$ und $\vec{F}_2(\vec{x}) = m(xy^2, x^2y)$ (wobei m eine Konstante ist):

   i) Auf geraden Strecken von $(0, 0)$ nach $(0, 1)$ und von dort nach $(1, 1)$. *(4 Punkte)*

   ii) Auf direktem Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$. *(4 Punkte)*

iii) Von $(0,0)$ nach $(1,1)$ entlang des Parabelbogens der Funktion $f(x) = x^2$. *(6 Punkte)*

2) Berechnen Sie nun $\vec{\nabla} \times \vec{F}_1(\vec{x})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}_2(\vec{x})$. *(4 Punkte)*

3) Zeigen Sie, dass $\vec{F}_2$ als einen gradient $\vec{F}_2 = -m\vec{\nabla}V$ geschrieben werden kann (d.h. finden Sie die Funktion V). In der Physik, die Funktion V ist das *Potential*, und $\vec{F}_2$ ist eine *konservative Kraft*. *(4 Punkte)*

4) Das *3d-Gravitationspotential* einer Masse M ist $V(r) = -GM/r$, wobei G die "Gravitationskonstante" ist, und r ist eine radiale Koordinate in $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die *Gravitationskraft* $\vec{F} = -m\vec{\nabla}V$, und die Arbeit dieser Kraft mit $r = R$ der Annfags- und $r = R + h$ der Endpunkt des Weges. Zeigen Sie dann, dass für $h \ll R$ man $W \approx -mgh$ hat, mit $g \equiv GM/R^2$ die "Gravitationsbeschleinigung" (hinweis: benutzen Sie die Annäherung $1/(1+x) \approx 1 - x$ für $x \ll 1$). *(8 Punkte)*