Übungsblatt 6

⚠ *Abzugeben bis: 15.12.2016 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

6.1: Flächen- und Volumenintegrale

1) Berechnen Sie die Fläche der Menge $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\right\}$. Skizzieren Sie das Gebiet für $a = 5$ und $b = 3$. *(6 Punkte)*

2) Sei $T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$. Berechnen Sie T^2 mit Polarkoordinaten. Welchen Wert hat folglich das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$? *(6 Punkte)*

3) Eine Kugel K mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius R besitze die Dichte $\rho(r) = r^a$ mit $a > 0$. Bestimmen Sie mit Kugelkoordinaten die Masse $M = \iiint_K \rho(r) dV$, die mittlere Dichte $\overline{\rho} = \frac{M}{V}$, den Massenmittelpunkt $r_m = (1/M) \iiint_K r\rho(r) \mathrm{d}V$, und den Inertialmoment $I = \iiint_K r^2 \rho(r) \mathrm{d}V$ der Kugel. *(10 Punkte)*

4) Die Gleichungen $x^2 + y^2 \geq 1 \ \forall z$ und $0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$ definieren einen Körper in $\mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie das Diagramm des Körpers, und berechnen Sie das Volumen mit Zylinderkoordinaten. *(10 Punkte)*

6.2: Gauß und der Donut

Die sogenannte Toruskoordinaten sind

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\theta))\cos(\varphi) \\ (R + r\cos(\theta))\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$, $R > 0$ und $0 < r < R$, mit r, R Konstanten. Man kann einen Torus (bzw. Donut) mit diesen Koordinaten parametrisieren.

1) Berechnen Sie das Flächenelement $d\vec{F} = (\vec{t}_\theta \times \vec{t}_\varphi) d\theta d\varphi$. Skizzieren Sie den Torus zusammen mit $r, R, \theta, \varphi, \vec{t}_\theta$ und $\vec{t}_\varphi$. *(6 Punkte)*

2) Zeigen Sie, dass die Oberfläche des Torus $A = 4\pi^2 rR$ beträgt. Zeigen Sie auch, dass das Volumen des Torus $V = 2\pi^2 r^2 R$ ist (Hilfe: $dV = |d\vec{F}| \ dr$). *(10 Punkte)*

3) Berechnen Sie den Fluss $\oiint_A \vec{f} \cdot d\vec{F}$ für

$$\vec{f}_1 = (x, y, z) \quad \text{und} \quad \vec{f}_2 = (\sinh(y^z), \log(x^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{5}{7}}), \arccos(2\pi x e^{\sqrt{y}}))$$

mit A die Oberfläche des Torus. *(10 Punkte)*

6.3: Stokes und der Paraboloid

Sei A die Paraboloidsoberfläche bei $z = x^2 + y^2$ für $z \leq 4$ definiert.

1) Skizzieren Sie die 2d-Oberfläche A und ihr 1d-Grenze ∂A. Zeigen Sie, dass man die 1d-Grenze ∂A als $(x, y, z) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 4)$ parametrisieren kann, mit $\theta \in [0, 2\pi)$. *(6 Punkte)*

2) Berechnen Sie $\iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot d\vec{F}$ für $\vec{f}_1 = (x, y, z)$ und $\vec{f}_2 = (0, xz^3, 0)$, mit $d\vec{F}$ das Flächenelement von A. Sind $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ konservative Felder? (erinnern Sie Übung 5.3.3). *(10 Punkte)*