Übungsblatt 7

⚠ *Abzugeben bis: 20.12.2016 (DIENSTAG!) um 18 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

7.1: Integralen mit Delta

Berechnen Sie folgende Integrale indem Sie die Definition der Delta-Distribution nutzen.

1) $\int_{-2}^{5}(x^2-5x+6)\delta(x-3)dx$ *(2 Punkte)*

2) $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-f(a))\delta(x-a)dx, \qquad a\in(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ *(2 Punkte)*

3) $\int_0^{\pi}\sin^3(x)\delta(\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{3}))dx$ *(4 Punkte)*

4) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\delta(t)dt$ *(2 Punkte)*

7.2: Summendarstellung von Delta

Zerlegen Sie folgende Delta-Distributionen in ihre Summensdarstellung.

1) $\delta(x^2-a^2), \quad a\in\mathbb{R}$ *(2 Punkte)*

2) $\delta(x^2-2x-15)$ *(2 Punkte)*

3) $\delta(\ln(x^2-3x-4))$ *(3 Punkte)*

4) $\delta\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)$ (**Hinweis:** Wie viele Nullstellen gibt es in $\mathbb{R}$?) *(4 Punkte)*

5) Zeigen Sie, dass für $a\in\mathbb{R}^+$ gilt: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}\delta(\sin(x))dx=\coth\left(\frac{a\pi}{2}\right)$ *(6 Punkte)*

(**Hinweis:** geometrische Reihe, $\sum_{n=0}^{\infty}r^n=1/(1-r)$ für $|r|<1$)

7.3: Eigenschaften der Delta

Zeigen Sie, dass die folgende Gleichungen gelten:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta'(x)dx=-f'(0)$. (**Hinweis:** betrachten Sie $\delta(x)$ als eine „Funktion") *(4 Punkte)*

2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta^{(n)}(x)dx=(-1)^nf^{(n)}(0)$. *(8 Punkte)*

3) $\delta(ax)=|a|^{-1}\delta(x)$. *(2 Punkte)*

4) $\delta(h(x))=|h'(x_0)|^{-1}\delta(x-x_0)$ mit $h(x_0)=0$. *(6 Punkte)*

5) $\delta((x-x_1)(x-x_2))=(\delta(x-x_1)+\delta(x-x_2))/|x_1-x_2|$. *(4 Punkte)*

6) $x\delta'(x)=-\delta(x)$. *(4 Punkte)*

7.4: Funktionenfolge und Delta

Für die folgende Funktionenfolge $g_n(x)$ Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g_n(x)dx = f(0)$, und deswegen Darstellungen von $\delta(x)$ sind:

1) $g_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$. *(6 Punkte)*

2) $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$. *(8 Punkte)*

(**Hinweis:** annehmen Sie, dass Limits und Integralen kommutieren, und benutzen Sie manchmal die Gleichung $\int_0^\infty e^{-xt}dt = 1/x$).

7.5: Elektrisches Potential einer Punktladung

Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^3$ die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

fürs Coulomb-Potential $V(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ und die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r})$ gilt.
(**Hinweis:** es wäre eine gute Idee, um ein bekannte Theorem von Integralen zu benutzen...). *(10 Punkte)*