Übungsblatt 8

⚠ *Abzugeben bis: 12.1.2017 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

8.1: Die Kippschwingung und die quadratharmonische Reihe

Es sei $f_1(x) = \frac{x}{2\pi}$ für $0 \le x \le 2\pi$ (die *Kippschwingung*) und $f_2(x) = x^2$ für $-\pi \le x \le \pi$.

1) Zeichnen Sie $f_1(x)$ und $f_2(x)$. *(8 Punkte)*

2) Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe von $f_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$ ist, und die Fourier-Reihe von $f_2(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4\cos(kx)}{k^2}$ ist. *(12 Punkte)*

3) Werten Sie $f_1(\pi/2)$ und $f_2(\pi)$ aus und zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}$ und $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *(8 Punkte)*

8.2: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Es sei $\mathcal{F}[f](k) \equiv g(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$ die Fourier-Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die „absolut integrierbar" ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ existiert und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Es gelte auch die folgende Beziehung: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk \equiv \mathcal{F}^{-1}[g](x)$.

1) Zeigen Sie die Fourier-Transformation ist linear, also für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt *(4 Punkte)*

$$\mathcal{F}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1\mathcal{F}[f_1(x)] + c_2\mathcal{F}[f_2(x)].$$

2) Zeigen Sie, dass die Beziehung $\mathcal{F}[f'](k) = ik\mathcal{F}[f](k)$ für die Ableitung $f' = \frac{df}{dx}$ gilt. *(4 Punkte)*

3) Mit Hilfe von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ zeigen Sie, dass $\delta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky}dk$, wobei $\delta(y)$ die Delta-Distribution ist (**Hinweis:** was ist die definierende Eigenschaft der Delta?). *(8 Punkte)*

8.3: Praxis mit der Fourier-Transformation

Sei $f_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)$ und $h_n(x) = e^{-|x|/n}$, mit $n > 0$.

1) Berechnen Sie $g_n(k) \equiv \mathcal{F}[f_n](k)$ und $s_n(k) \equiv \mathcal{F}[h_n](k)$. *(8 Punkte)*

2) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} g_n(k) = \lim_{n\to\infty} s_n(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k)$ gilt, mit $\delta(k)$ die Delta-Distribution. *(8 Punkte)*

(**Hinweis:** erinnern Sie Übung 7.4).

8.4: Die Unschärferelation

Die sogenannte *Unschärferelation* ist ein wichtiger Satz von Fourier-Transformationen, mit direkt Anwendungen sowohl in der Quantenphysik als auch in andere Fälle (z.B., in der Musik! Schauen Sie http://newt.phys.unsw.edu.au/jw/uncertainty.html). Wir werden jetzt diese wichtige Relation schrittweise beweisen.

Es sei $\mathcal{F}[f](k) \equiv g(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ die Fourier-Transformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die ,,absolut integrierbar" ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ existiert und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

1) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} x(|f(x)|^2)' dx = -1$ gilt. (**Hinweis:** benutzen Sie $\int u dv = uv - \int v du$). *(4 Punkte)*

2) Zeigen Sie, dass $1 \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ gilt. (**Hinweis:** grenzen Sie das Integral mit der Summe von Absolutbeträge ab, und benutzen Sie dann die *Cauchy-Schwartz Ungleichung* $|\int uv dx|^2 \leq \left(\int |u|^2 dx\right)\left(\int |v|^2 dx\right)$). *(8 Punkte)*

3) Endlich zeigen Sie, dass

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} k^2 |g(k)|^2 dk\right) \geq \frac{1}{4} \tag{1}$$

gilt. (**Hinweis:** benutzen Sie die *Parseval-identität* $\langle f_1 | f_2 \rangle = \langle \mathcal{F}(f_1) | \mathcal{F}(f_2) \rangle$). Was ist die Bedeutung dieser Ungleichung? *(8 Punkte)*