Übungsblatt 9

⚠ *Abzugeben bis: 19.1.2017 um 18:00 Uhr*

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

9.1: Legendre, Hermite, und Laguerre-Polynome

Es seien $P_n(x)$ die Legendre-Polynome mit $x \in [-1,1]$, $H_n(x)$ die Hermite-Polynome mit $x \in (-\infty,\infty)$, und $L_n(x)$ die Laguerre-Polynome mit $x \in [0,\infty)$. Man kann diese Polynome durch die Sätzte von Rodrigues definieren:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \\
H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \\
L_n(x) &= \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).
\end{aligned}$$

1) Finden Sie explizit die Polynome $P_n(x), H_n(x)$ und $L_n(x)$ für $n = 0, 1, 2,$ und 3. *(12 Punkte)*

2) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{y} P_n(x)dx = \frac{P_{n+1}(y) - P_{n-1}(y)}{2n+1}$$

gilt (**Hinweis:** benutzen Sie $(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$ und $P_n(-1) = (-1)^n$). *(6 Punkte)*

3) Es seien die Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1 \\
f_2(x) &= x^4
\end{aligned}$$

mit $x \in [-1,1]$. Finden Sie die Darstellungen für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ als Reihen mit Legendre-Polynome $P_n(x)$, bis $n = 3$. *(10 Punkte)*

9.2: Vollständigkeitsrelation und die Delta-Distribution

Die Funktionen $Q_n(x)$ sind orthogonale, mit $x \in [a,b]$, und Gewichtsfunktion $\rho(x)$, d.h.,

$$\langle Q_n | Q_m \rangle \equiv \int_a^b Q_n(x)Q_m(x)\rho(x)dx = c_n\delta_{nm},$$

mit δ_{nm} die Kronecker-Delta. Zeigen Sie, dass die Delta-Distribution $\delta(x-x')$ als eine Reihe

$$\delta(x-x') = \sum_n \frac{1}{c_n}\rho(x)Q_n(x)Q_n(x')$$

dargestellt werden kann (**Hinweis:** benutzen Sie die Definition $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')f(x)dx = f(x')$). *(12 Punkte)*